جامعة المنصـورة
كليـة التربية

فعّالية استخدام نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية

إعـداد
د. مُسعد مُحمد إبراهيم حجازي
دكتوراه الفلسفة في التربية
(مناهج وطرق تدريس الرياضيات)

مجـلة كلـــية التربية – جامعـــة المنصـــورة
العدد ١١٠ – إبريل ٢٠٢٠

فعّالية استخدام نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية

د. مُسعد مُحمد إبراهيم حجازي
دكتوراه الفلسفة في التربية
(مناهج وطرق تدريس الرياضيات)

الملخص:

استهدف هذا البحث الكشف عن فعالية استخدام نمـوذج بيـري وكيـرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في تنمية مهارات التفكير الجبري لدى طلاب الصف الثاني الإعـدادي. وقد تكونت عينة البحث من صفين من صفوف الصف الثاني الإعدادي في مدرسة الدكتور محمد أبو الليل الإعدادية التابعة لمديرية التربية والتعليم بالدقهلية في العـام الدراسـي ٢٠١٩-٢٠٢٠، وقد بلغ عدد التلاميذ (٧٣) تلميذ وتلميذة، قسموا عشوائياً إلى مجموعتين: تجريبية وتكونت مـن (٣٥) تلميذ وتلميذة، والذين درسوا الوحدة المُختارة باستخدام نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي ، والثانية ضابطة والتي تكونت من (٣٨) تلميذ وتلميذة، وقـد درسـت بالطريقة العادية. وقد أعد الباحث اختبار التفكير الجبري وتم التحقق من صدقه وثباته، كما أعـد الباحث دليل المُعلم للتدريس باستخدام نموذج بيري وكيرين. وقد أظهرت النتائج المُتعلقة بالتفكير الجبري بشكل عام ومهاراته الفرعية (مهارات التمثيل – مهارات الاسـتدلال – مهـارات حـل المُشكلة) تفوق المجموعة التجريبية الذين درسوا باستخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضـي على تلاميذ المجموعة الضابطة الذين درسوا بالطريقة الإعتيادية.

الكلمات المفتاحية: نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) – التفكير الجبـري– مهـارات التمثيل – مهارات الاستدلال – مهارات حل المشكلة.

Abstract

This research aims to determine the effectiveness of a Model Pirie and Kieren to Develop Algebraic Thinking for the second year middle school students.

This study covers a specified sample, Gr.8 literary section students at Doctor Muhammad Abu Al-Lail Preparatory School, temie alamdeed, aldakahliah, and was applied during the first semester of the school year 2019-2020, and dividing it into two groups: a control group (35), and an experimental group (38). The dependent variable: Algebraic Thinking

The research came to the following findings:

1. There is a significant difference at ($\leq$ 0.05) level between averages of student scores of both control and experimental groups in the post-scal of Algebraic Thinking in favor of the experimental group.
2. There is a significant difference at ($\leq$ 0.05) level between averages of student scores of both pre-scale and post-scale of Algebraic Thinking in favor of the post-scale.

مُقدمـــة:

تُعتبر الرياضيات واحدة من أفضل الوسائل لتنمية مهارات التفكير بصفة عامة ومهـــارات التفكير الجبري على وجه الخصوص، وخاصة أن أهداف تدريس الرياضيات تؤكد علـــى أهميـــة إكساب الطلبة مهارات التفكير، لذا أخذ تعليم وتعلم مادة الرياضيات اهتماماً كبيراً على مُـــستوى العالم، ويظهر ذلك في في ظهور العديد من المؤسسات والمُنظمات التي تهتم بتطوير عملية تعليم وتعلم الرياضيات، وتحسين مُستوى الطلاب فيها، ومن بين هذه المؤســـسات الكبيـــرة الجمعيـــة الأمريكيـــة لمُعلمـــي الرياضـــيات National Council of Teachers Mathematics (NCTM)، وكذلك الجمعية الأمريكية للعلوم والرياضيات المدرســـية Society for Science and Mathematics American (SSMA) والتي من أبرز معاييرها تنمية مهـــارات التفكيـــر بجميع أنماطه ومنها التفكير الجبري.

وتُشير أدبيات تعليم الرياضيات لأهمية تنمية التفكير الجبري لدى الطلبة باعتباره هدف عام يتعلق بعمليات تعليم وتعلم الجبر والتي ينبغي أن يتعلمها جميع الطلبة في جميع المراحل الدراسية ومنها المرحلة الإعدادية.

ولذلك أصبحت هناك حاجة مُلحة إلى تغيير مفهوم التعليم ومُمارساته للخروج من المفهـــوم والنمط التقليدي والذي يهتم بالحفظ والاستظهار والتلقين على حساب التفكير النشط، إلى المفهـــوم الذي يهتم بتنمية مهارات التفكير المُختلفة. (عبدالله النافع، ٢٠٠٢)

ولما كانت السمة الغالبة على تدريس الرياضيات في الوقت الحالي هي التركيز على تنمية الفهم العام للمنظومة الرياضية وحل المُشكلة، لذلك من الضروري تطوير تـــدريس الرياضـــيات لتحقيق قدرة رياضية عالية وتنمية التفكير، وعليه جاءت فكرة البحث للكشف عن فعالية نمـــوذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في تنمية التفكيـــر الجبـــري لـــدى تلاميـــذ المرحلة الإعدادية.

الإطار النظري للبحث:

أولاً: نموذج بيري وكيرين Pirie and Kieren:

إن دُعاة الإصلاح للمناهج الدراسية يؤكدون ضرورة تدريس الرياضيات مع الفهم، كما أن توصيات العديد من المؤتمرات التربوية والنفسية تؤكد أهمية تعلم وتعليم الرياضيات مع الاستيعاب، وتسليط الضوء على الطريقة التي ينمو بها الاستيعاب الرياضي، وتحديد الأفعال التربوية التي ترعى ذلك، وكان هناك الكثير من الاهتمام في استكشاف طبيعة الاستيعاب الرياضي. (Simmt, 2002؛Pirie & Kieren, 1999)

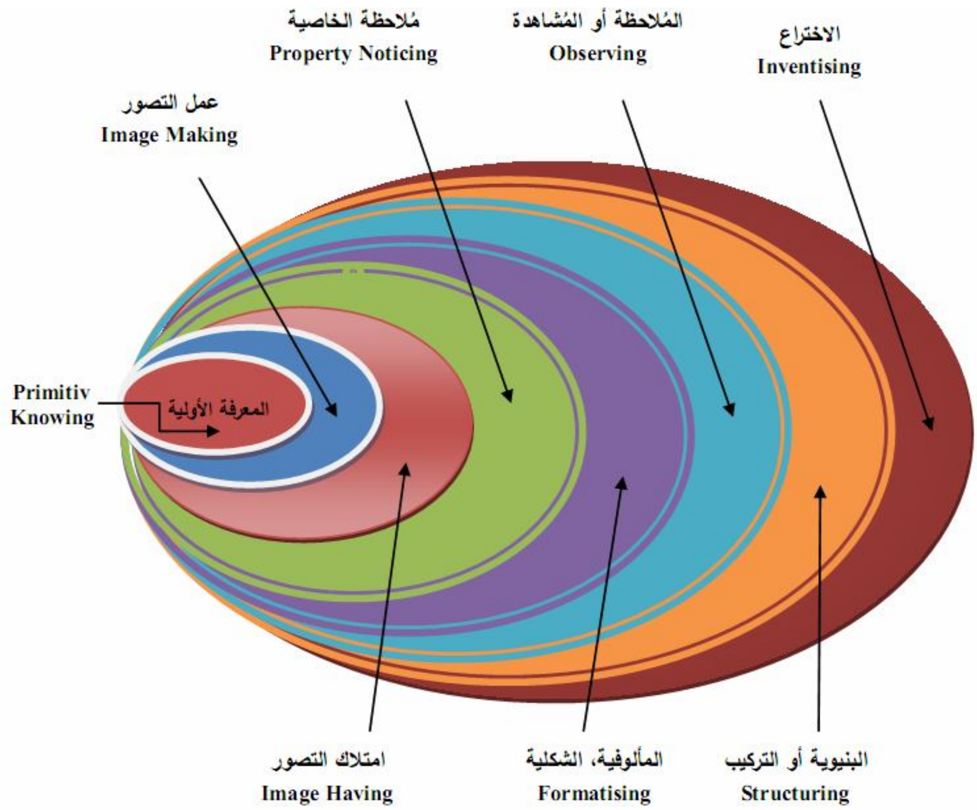
واقترح سوزان بيري وتوم كيرين مراحل النمو للفهم الرياضي ككل بوصفها عملية ديناميكية مُتعددة المُستويات وليست خطية، وتهدف هذه النظرية إلى تطوير إطار عمل مفاهيمي لدراسة النمو في الاستيعاب الرياضي، حيث يتبنى بيري وكيرين (Pirie and Kieren) بشكل واضح وتفصيلي التعريف البنائي للاستيعاب الرياضي على أنه: عملية مُستمرة لإعادة تنظيم البنية المعرفية الرياضية للمُتعلم نفسه. وتُدعى هذه النظرية بالنظرية الديناميكية لقياس ومُتابعة نمو الاستيعاب الرياضي في موضوع معين، ولها (٨) مُستويات أو طبقات يتم فيها الإنتقال من طبقة إلى أخرى بشكل مُباشر. (Pirie & Kieren, 1999)

فقد يكون هناك حاجة للإنتقال أو الرجوع إلى طبقة أدنى من أجل تعمق الاستيعاب وتوسيع مداه. وهناك ميزة مُهمة في النموذج وهي ميزة البناء المُتكرر والارتجاعي، ففي عملية التكرار والرجوع يتم زيارة الطبقات الداخلية عدة مرات وبشكل مُتكرر أي دخولاً إلى الطبقات الداخلية وخروجاً إلى الطبقات الخارجية أثناء عملية توسيع الاستيعاب الرياضي. وتُسمى هذه العملية بالطي الإرتجاعي والتي تحدث عندما يواجه المُتعلم سؤلاً أو مُعضلة في أي مُستوى أو طبقة كان ولا يستطيع حلها، فإنه يفكر بالرجوع إلى مُستوى داخلي لحل تلك المُشكلة وتوسيع معرفته المُتوفرة والتي تعتبر غير كافية وغير مُلائمة لمُساعدته في الحل. (Kieren and Simmt, 2002)

والطي الإرتجاعي هو نشاط عقلي يقوم فيه المُتعلم بالدخول والرجوع إلى معرفته الإبتدائية والطبقات الداخلية من أجل بناء الاستيعاب الرياضي في طبقة تفكيرية خارجية، وتعتبر عملية الطي الإرتجاعي جزءاً من عملية إعادة بناء معرفة المُتعلم الرياضية وتحدث بشكل مُتكرر، وهي ضرورية لبناء المعرفة في المُستويات الخارجية. (Pirie and Kieren, 1991)

وهذا يعني أن الأنشطة التفكيرية للمُتعلم لا تسير في إتجاه واحد، وأن المُتعلم الذي يعمل تفكيره في طبقة أو مُستوى خارجي مُعين سوف يستمر بالرجوع إلى المُستويات الداخلية من أجل توسيع استيعابه وفهمه لموضوع رياضي مُعين، ومن الضروري الإنتباه إلى أنه ليس كل أفعال الطي الإرتجاعي ضرورية وفاعلة في توسيع الاستيعاب الرياضي للمُتعلم. لأنها عملية مُعقدة وليست بسيطة، وتعتمد فاعلية الطي الارتجاعي على عاملين أساسيين هما: البنية الخاصة بالبيئة التعلمية، والمُتعلم نفسه كفرد. (Pirie and Kieren, 1994)

وتكون أكثر فاعلية عندما يُحاول المُتعلم فيها تجميع بيانات رياضية ومعلومات مُعينة خاصة، والتجميع: هو وجه من أوجه الطي الارتجاعي عندما يعرف المُتعلم ما يحتاجه لحل مسألة مُعينة، لكن استيعابه الحالي والمُتوفر في ذلك الحين غير كاف للاسترجاع الآلي السريع للمعرفة المُستخدمة، وعليه تهدف هذه النظرية إلى تقصي وبحث نمو التعلم لموضوع رياضي مُعين من ناحية المدى والعمق من قبل المُتعلم، ولها (٨) طبقات كما هو موضح بالشكل: (Kieren and Simmt, 2002؛ Pirie & Kieren, 1999؛ Pirie and Kieren, 1994 ؛ Pirie and Kieren, 1991)



شكل (١) يوضح نموذج بيري وكيرين Pirie and Kieren

١. **المعرفة الأولية أو الإبتدائية:** المعرفة التي ليس لها علاقة بالمعرفة الرياضية المُتخصصة كالمعرفة المُتعلقة باستيعاب السلوك الإنساني بصورة عامة، وهي الطبقة الداخلية، وهي نقطة البداية لنمو أي استيعاب رياضي خاص. ثم تأتي بعدها الطبقات التفكيرية السبع الخارجية والتي تُمثل المعرفة عن موضوع رياضي مُحدد ويتكون بناء كل طبقة أو مُستوى، ويشتمل من ناحية بنيته على كل المُستويات الداخلية له حيث تتألف كل طبقة من هذه الطبقات من جزأين مُتتامين يشملان الجهد العقلي والأفعال المادية هما (الفعل والتعبير).

٢. **عمل التصور:** يطلب من المُتعلم أن يقدم تمييزات لما في معرفته السابقة، واستخدامها لطرائق حل في مواقف جديدة (يعمل/ يراجع).

٣. **امتلاك التصور:** عندما يستطيع المُتعلم استعمال بنائه العقلي حول موضوع مُعين دون الحاجة للقيام بالأنشطة الخاصة التي أوصلت أو أدت إلى ظهوره (يرى/ يقول).

٤. **مُلاحظة الخاصية:** تحدث عندما يستطيع المُتعلم العمل (يتنبأ/ يسجل)، أي عندما يتمكن المُتعلم من جمع سمات التخيلات لبناء خصائص ذات صلة.
٥. **المألوفية أو الشكلية/ التشكيل:** عندم يجرد المُتعلم طريقة أو خاصية مُشتركة من التصور السابق المُعتمد على معرفة الكيفية التي تميز الخواص المُلاحظة.
٦. **المُلاحظة أو المُشاهدة:** عندما يكون المُتعلم في موقع يتأمل في النشاط الرسمي ويفكر به ويعبر عن أفكاره كنظريات.
٧. **البنيوية:** عندما يحاول المُتعلم التفكير بمُلاحظته الرسمية كنظرية.
٨. **الاختراع:** استيعاب كامل وله بنية أي تنظيم هيكلي ويستطيع الإنقطاع أو الإنفصال والإبتعاد عن تصوراته السابقة التي أوصلته إلى هذا الاستيعاب ويبدأ بإثارة أسئلة جديدة والتي تنمو وتؤدي بشكل كامل إلى مفهوم جديد.

ومما يُلاحظ في هذه النظرية أن المُستويات (٢، ٣، ٤) أقل تجريداً وشكلية ومُستواها أكثر محلية أو محدودية، أما المُستويات من (٥–٨) فهي مُستويات مُجردة وشكلية، وتخلص النظرية إلى استيعاب الطلاب لأي موضوع رياضي يرتبط بثلاثة عناصر هي: طرائق التدريس الجيدة وترتبط بالمُعلم، والنمو في التعلم الرياضي ويرتبط بالطالب، ومنهاج الرياضيات كمُحتوى وعلم.

ونظراً لأهمية هذا النموذج فقد أُجريت حوله دراسات عدة، ومنها: دراسة ويلسون وستين (Wilson and Stein, 2007) والتي أظهرت أن الطلبة الذين درسوا باستخدام نموذج بيري وكيرين تحسن فهمهم للنماذج والتمثيلات الرياضية، ودراسة والتر وجيبونس (Walter and Gibbons, 2010) والتي هدفت إلى بيان فاعلية نموذج بيري وكيرين في حل المُشكلات الرياضية، وتوصلت الدراسة إلى نمو حل المُشكلات الرياضية لدى عينة الدراسة نتيجة التدريس بنموذج بيري وكيرين، بينما خلُصَت دراسة محمد الخطيب (٢٠١٧) أن استخدام نموذج بيري وكيرين أدى إلى النمو في الاستدلال المنطقي وخفض العبء المعرفي لدى طلاب الصف السابع الأساسي في الأردن.

ثانياً: التفكير الجبري:

يدعم أهمية أن يتعلم الطلاب الجبر ومفاهيمه الأساسية مُستخدمين أدوات التفكير فيه ظهور العديد من المشروعات والأطر النظرية التي تناولت تنمية ما يُسمى بالتفكير الجبري Algebraic Thinking عند دراستهم للجبر كهدف رئيس من أهداف تعليم وتعلم الجبر عبر مُختلف المراحل

التعليمية الجامعية وقبل الجامعية مثل: (Algebraic Thinking Math Project, 2001)، (Cai, and Moyer, 2008).

أ- تعريف التفكير الجبري:

فقد عرف جوهانينج (Johanning, 2004, P.372) التفكير الجبري كمدخل للمواقف الكمية التي تؤكد على شكل من العلاقات التي تتصف بالعمومية، وذلك باستخدام أدوات لا تعتمد بالضرورة على الحروف الرمزية فقط وإنما يتم استخدامه كدعم معرفي في تقديم حوار حجرة الدراسة عند تعليم وتعلم الجبر.

ويرى (Urquhart, 2000) أن للتفكير الجبري مركبتان رئيسيتان هما: أدوات التفكير الرياضي Mathematical Thinking Tools، وأفكار الجبر Algebraic Ideas؛ وتتمثل أدوات التفكير الرياضي في مهارات حل المشكلة (استخدام استراتيجيات حل المُشكلة واستكشاف المداخل والحلول المُتعددة)، ومهارات التمثيل الرياضي (عرض العلاقات مرئياً ورمزياً وعددياً ولفظياً)، ومهارات الإستدلال (الإستقرائي والإستنباطي)، أما مركبة أفكار الجبر فتتضمن رؤى الجبر المُختلفة مثل الجبر كتجريد للحساب Algebra as abstract arithmetic، والجبر كلغة الرياضيات Algebra as the language of mathematics، والجبر كأداة لدراسة الدوال والنمذجة الرياضية Algebra as a tool to study functions and mathematical modeling.

ويُقصد بالتفكير الجبري "استخدام الأدوات ورموز الرياضيات لتحليل المواقف عن طريق: (Herbert and Brown, 2015, 123)

- استخلاص المعلومات من الموقف ووصفها جبرياً.
- تمثيل تلك المعلومات بواسطة الكلمات والرسوم التوضيحية والبيانية، والجداول، والرسوم.
- تفسير وتطبيق الحلول والإستراتيجيات للموقف والمواقف الجديدة المُرتبطة به".

ويذكر انطونيو (Antonio, 2003) ثلاثة عمليات تُساعد في تنمية التفكير الجبري هي:

١. التجميع والفك Doing – Undoing: فالتفكير الجبري الفعّال يتطلب أحياناً المعكوسية أو المقلوبية التي تعنى القدرة على العودة بالعمليات الرياضية للوراء أي البدء بالناتج للوصول إلى نقطة البداية.

٢. بناء/ إنشاء القواعد لتمثيل الدوالBulding Rules to Represent Functions: فالتعرف على الأنماط Patterns وتنظيم البيانات الداخلة والخارجة لدالة تُعد من مهارات التفكير الجبري.

٣. التجريد من الحسابات Abstracting from Computations: فالتفكير الجبري يستلزم استخدام مهارات التفكير حول الحسابات العددية والحالات الخاصة عن طريق القيام بعملية التجريد لطريقة تنظيم تلك الأعداد والحسابات للتوصل إلى تعميم أو أكثر.

ويضيف رادفورد (Radford, 2001) أن العنصرين الهامين في تدريس التفكير الجبري هما اللغة واستخدام الرموز.

معنى ذلك أن التفكير الجبري يتطلب تدريسه كل من مهارات التفكير الرياضي وتوظيف أفكار الجبر الأساسية كمُحتويات له، واستخدام اللغة للتعبير عنه.

ب- مهارات التفكير الجبري:

ويتم عرض مُختصر لأدوات التفكير الرياضي كإحدى مركبتي التفكير الجبري:

١- مهارات التمثيل Representation Skills:

تُعتبر أدوات التمثيل كالألفاظ والمواد الملموسة والرسومات التخطيطية والبيانية والرموز والمُعادلات والجداول ذات فعالية في مُساعدة التلاميذ على توصيل وتوضيح وشرح أفكارهم للآخرين، حيث تمكنهم من حل الكثير من المُشكلات الجبرية. (Kondratieval and Radu, 2009) (Fennell and Rowan, 2001, p.289)

ويتطلب توظيف التمثيل في تعلم الجبر ابتكار واستخدام التمثيلات لتنظيم وتسجيل الأفكار الجبرية والتواصل بها، واختيار وتطبيق التمثيلات والترجمة بينها لحل المُشكلات واستخدام التمثيلات لنمذجة وتفسير الظواهر الفيزيائية والاجتماعية والرياضية. (Coulombe and Berenson, 2001, P.172)

٢- مهارات الاستدلال Reasoning Skills:

يُعد الاستدلال ركيزة أساسية في الرياضيات كعلم من جانب وتدريسها من جانب أخر، ويستدل على ذلك بأن الرياضيات بوصفها عملية استدلالية Mathematics as Reasoning يُعد أحد المعايير الأساسية الواجب توافرها في مناهج الرياضيات طبقاً لما أشارت إليه معايير المجلس القومي لمُعلمي الرياضيات. (NCTM, 2000)

ويمكن تحديد أنماط التفكير الاستدلالي على وجه العموم إلى فئتين هما:

- **الاستدلال الإستقرائي Inductive Reasoning:**

ويُشير إلى قدرة الفرد على التعامل مع الحالات الفردية والمُتنوعة وصولاً منها إلى الحالة أو القاعدة العامة، مثل أن يُلاحظ الطالب عدداً من حالات المثلث فيتوصل إلى أن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠^0

- **الاستدلال الاستنباطي Deductive Reasoning:**

ويشير إلى قدرة الفرد على الوصول إلى حالات خاصة من القاعدة العامة، مثل أن يستطيع الطالب تحديد قياس زاوية من مثلث بمعلومية الزاويتين الأخرتين، مستفيداً من معرفته بأن مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠^0. (وليم عبيد، وعزو عفانة، ٢٠٠٣، ٤٦-٤٧)

والاستدلال المنطقي هو عملية تتضمن التوصل إلى استنتاجات بالاستناد إلى دليل ما، وكثيراً ما يتسرع الطلبة في الوصول إلى استنتاجات لا تبررها الأدلة المُتوافرة لديهم. (هشام حسين ومصطفى محمد، ٢٠١٣)

وعملية الاستدلال هي عملية بحث ذهنية مُنظمة تهدف للوصول إلى حقيقة مجهولة بمُساعد حقائق ومعلومات معلومة. (Copeland, 2006)

ويرى بياجيه أن الاستدلال المنطقي عملية عقلية يمكن أن تنمو وتتطور من خلال التفاعل مع الأنشطة والخبرات، وهو ما يضع الطالب أمام إمكانات ذهنية جديد، من خلالها يمكنه التحرر بتفكيره من حدود المحسوس إلى عالم التصورات الذهنية والمبادئ والنظريات. (Bacon, Handley and Newstead, 2003)

ويتضمن الاستدلال المنطقي من وجهة نظر بياجيه عدداً من العمليات العقلية هي: الاستدلال التناسبي، والاستدلال الإحتمالي، والاستدلال التركيبي، والاستدلال الاستنباطي، والقياس المنطقي، وضبط المُتغيرات. (رباب على، ٢٠١٥؛ Felsner, 2004).

وقد صنف ابراهيم رفعت (٢٠٠٨) الاستدلال المنطقي في دراسة قام بها إلى (الاستدلال الاستنباطي الفرضي – الاستدلال التناسبي – الاستدلال الإحتمالي – الاستدلال الارتباطي). حيث تم اختيار مجموعة من تلاميذ الصف الأول الإعدادي بمدرسة على بن أبي طالب بمحافظة بورسعيد خلال الفصل الدراسي الثاني من العام الدراسي ٢٠٠٧/٢٠٠٨م، وقد شملت العينة فصلين وقسما إلى مجموعتين تجريبية (٢٩)، وضابطة (٢٦). وقد توصلت الدراسة إلى فاعلية نموذج إسراع النمو المعرفي في تنمية مهارات التواصل الرياضي والتفكير الاستدلالي لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

ويرى جارسيا (Garcia, 2000) أن الاستدلال المنطقي يتضمن: الاستدلال التناسبي، التحكم بالمُتغيرات، والاستدلال الترابطي، والاستدلال التوافقي.

وعلى الرغم من أهمية الاستدلال، إلا أن نتائج الأبحاث تُشير إلى أن الطلبة يواجهون صعوبة كبيرة فيه، كما أن فهم الطلبة للاستدلال المنطقي ضعيف نسبياً.

(Felsner, 2004 ؛ رباب على، ٢٠١٥ ؛ محمد الخطيب، ٢٠١٧)

٣- مهارات حل المُشكلة Problem Solving Skills:

مهارات حل المُشكلات مُتطلب أساسي في حياة الفرد، فكثير من المواقف التى تواجهنا فى الحياة اليومية هى أساساً مواقف تتطلب حل مشكلات، فحل المشكلات يُعتبر أكثر أشكال السلوك الإنسانى تعقيداً وأهمية؛ ويأتى فى قمة الهرم (هرم النتاجات التعليمية) عند جانييه، ويتعلم الطلاب حل المشكلات ليصبحوا قادرين على اتخاذ القرارات السليمة فى حياتهم، فلو كانت الحياة التي سيواجهها الأفراد ذات طبيعة ثابتة، وكان لكل منهم دوراً أو أدواراً محددة يؤدونها لما كان حل المشكلات قضية مُلحة، فكل ما على الفرد أن يتعلمه هو تأدية أدواره المحددة له، ولكن الحياة متغيرة ومعقدة، وكل ما نستطيع أن نتنبأ به هو أنها لن تكون على ما هى عليه الآن، في عالم كهذا، تغدو مقدرة الفرد على التكيف وحل المشكلات أمراً بالغ الأهمية. (فريد أبو زينة، ٢٠١٠، ٣٠٥)

فيُعرّف وليم عبيد (٢٠٠٤، ١٣٨-١٣٩) "المشكلة بأنها موقف به تساؤل يتطلب الإجابة أو مطلوباً يتطلب الوصول إليه أو هدف يتطلب تحقيقه أو قضية تتطلب التحقق من صحتها أو علاقة يطلب إقامة الدليل أو البرهنة على صحتها ويكون التلميذ مهتماً بحلها".

ويذكر وليم عبيد وآخرون (٢٠٠٠، ٨٦) أن التلميذ يكون فى موقف مشكل إذا كان لديه هدف واضح ومحدد ويعي به ويريد أن يصل إليه، ولكن هناك عائقاً يحول دون ذلك، وما لدى التلميذ من معلومات متاحة عن الموقف، وما هو مكتسب لديه من خبرات سابقة لا يتيحان له أن يصل إلى الحل المطلوب.

ويرى فريد أبو زينة (٢٠١٠، ٣٠٥) المشكلة بأنها موقف يواجه الفرد، أو مجموعة من الأفراد، ويحتاج إلى حل، حيث لا يرى الفرد طريقاً واضحاً أو ظاهراً للتوصل إلى الحل المنشود.

ويشير مجدي عزيز (٢٠٠٣، ١١٦) إلى أن حل المشكلات الرياضية يكمن فى المُمارسات والأنشطة العقلية والسلوكية التى يؤديها الفرد منفرداً أو تحت توجيه وإرشاد المعلم بهدف

الوصول إلى الحل الصحيح لنظريات وتمارين الرياضيات المدرسية، وذلك عن طريق الاستقراء أو الاستدلال.

ويُعرّف ناجي ديسقورس (٢٠٠٥، ٣٩) حل المشكلات بأنه عبارة عن موقف يواجه الفـــرد ويتطلب معه اتخاذ قرار بغض النظر عن طبيعة الموقف، وهذا القرار يتعلق باختيار إســـتراتيجية معينة للحل مثل إستراتيجيات ما وراء المعرفة كمتطلب أساسي وضـــروري لحـــل المـــشكلات، واختيار ما لدى الفرد من معلومات حول المشكلة، وضبط الذات والأفعـــال للقيـــام بتقيـــيم فهـــم المشكلة، وتخطيط إستراتيجية مناسبة للحل، ثم مراقبة وضبط اتجاه عملية الحل.

وهكذا، فإن حل المشكلة يعد أمراً هاماً وضرورياً، وهذا ما أشار إليه كثير مـــن البـــاحثين وعلماء النفس والرياضيات، وذلك بالنسبة لجميع فروع العلم بصفة عامة والرياضـــيات بـــصفة خاصة، ولذلك أجريت العديد من الدراسات التي تبين أهمية وضرورة تنمية حل المشكلات لـــدى التلاميذ في جميع المراحل الدراسية المختلفة، ومن هذه الدراســـات: دراســـة عـــزة عبدالـــسميع (٢٠٠٩)، والتي هدفت إلى قياس مدى فاعلية إستراتيجيات ما وراء المعرفة في تنمية مهـــارات حل المشكلات الرياضية والتفكير الناقد والاتجاه نحو الرياضـــيات لـــدى طـــلاب الـــصف الأول الثانوي بمدرسة الطبري الثانوية التابعة لإدارة النزهة التعليمية بمحافظة القاهرة، وقد بينت نتـــائج الدراسة وجود فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي درجات طلاب المجموعـــة التجريبيـــة فـــي التطبيق القبلي والبعدي لاختبار حل المشكلات الرياضية ككل ومكوناته الفرعيـــة عنـــد مُـــستوى ٠,٠١ لصالح التطبيق البعدي، ودراسة (لمياء الشافعي، ٢٠١٠)، والتي هدفت إلى تنمية مهارات حل المسألة لدى طلاب الصف التاسع بغزة، وذلك باستخدام برنامج أعدته الباحثة، وقـــد بينـــت نتائج الدراسة وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطي درجـــات الطالبـــات فـــي إختبـــار مهارات حل المسألة الرياضية في المجموعة التجريبية قبل وبعد تطبيق الاختبار لصالح التطبيـــق البعدي، وذلك نتيجة استخدام البرنامج التدريبي، ودراسة (تركي السلمي، ٢٠١٣)، والتي هـــدفت إلى التعرف على درجة إسهام معلمي الرياضيات في تنمية مهارات حل المشكلات الرياضية لدى طلاب الصف الرابع الابتدائي بمكة المكرمة، وتوصلت نتائج الدراسة إلى أن درجة إسهام معلمي الرياضيات في تنمية مهارات فهم المشكلة لدى طلاب الصف الرابع الإبتـــدائي كـــان بمـــستوى متوسط، في حين أن درجة إسهامهم في تنمية مهارات: وضع خطة للحل، وتنفيذ خطـــة الحـــل، والتحقق من صحة الحل كان بمستوي منخفض، أما درجة إسهامهم في تنمية مهارة حل المـــشكلة

ككل فكان بمستوى منخفض، وأوصت الدراسة بالحرص على تكوين اتجاهات إيجابية عند الطلاب والمعلمين حول حل المشكلات الرياضية.

هذا وقد أجريت العديد من الدراسات التي اهتمت بالتفكير الجبري في مراحل دراسية مُتنوعة، ومن هذه الدراسات ما يلي:

دراسة أحمد رجائي (٢٠٠٩) والتي هدفت إلى بيان تأثير تدريس أنشطة حول (المُتغيرات والأنماط) في تنمية التفكير الجبري لدى عينة من طلاب الفرقة الثالثة تخصص الرياضيات وتعديل مُعتقداتهم نحو طبيعة تدريس الجبر، وقد تكونت عينة الدراسة من ٦٠ طالباً وطالبة من طلاب الفرقة الثالثة شعبة الرياضيات بكلية التربية-جامعة طنطا دُرِّست لهم أنشطة حول "المُتغيرات والأنماط" خلال الفصل الدراسي الأول من العام الدراسي ٢٠٠٨/٢٠٠٩. وأشارت نتائج الدراسة إلى وجود تأثير تدريس الأنشطة حول "المُتغيرات والأنماط" في التحصيل والتفكير الجبري وتعديل المُعتقدات نحو طبيعة الجبر.

ودراسة سامو (Samo, 2009) والتي استعرضت الرؤى المفاهيمية لطلاب المرحلة الثانوية نحو الجبر؛ وأُعطيت للطلاب مهام حول حس الرمز والتفكير الجبري ورؤاهم حول استخدام الحروف (استخدمت الرموز في الجبر كمجهول أو كتعميم أو كمُتغير....) والمُعادلات والتعبيرات الجبرية، كما تتضمنت المهام بعض المواقف التي تقيس فهم الحساب، وأشارت تلك الدراسة إلى وجود صعوبات ومفاهيم بديلة خاطئة لدى الطلاب في الجبر بسبب رؤاهم المفاهيمية غير الصحيحة تجاه بعض الموضوعات الجبرية، وأوصت بضرورة تدريس الجبر ورؤيته كلغة للتعبير عن العلاقات الرياضية المُختلفة.

ودراسة بانستر ووليكنز (Bannister and Wilkins, 2006) والتي هدفت إلى تحليل حلول عينة من تلاميذ المرحلة الإعدادية بلغ عددهم ٢٤ تلميذ وتلميذة على بعض مُشكلات تتطلب منهم كل من مهارات التفكير الحسابي ومهارات التفكير الجبري، وذلك في ضوء دلائل حول الاستدلال في الحساب والجبر عند التعامل مع الأعداد والمجاهيل، وأشارت النتائج إلى أن التلاميذ كانوا في مرحلة مُتوسطة بين الإنتقال من التفكير الحسابي إلى التفكير الجبري.

ودراسة كاي وآخرون (Cai, Lew, Morris, Moyar, & Schmittau, 2005) والتي هدفت إلى تنمية التفكير الجبري في صفوف تعليمية بالمرحلتين المُتوسطة والعليا، وأشارت النتائج إلى أهمية عنصرين هامين في تنمية التفكير الجبري ينبغي الإهتمام بهما وهما المُعلم والمنهج المدرسي.

ودراسة جوهانينج (Johanning, 2004, P.372) والتي استكشفت المداخل غير الشكلية التي يستخدمها طلاب الصفوف المُتوسطة (السادس والسابع والثامن) الذين لم يدرسوا الجبر الشكلي من قبل وعلاقة ذلك بالتفكير الجبري لديهم، وتم مُلاحظتهم وتحليل أعمالهم المكتوبة واجراء مُقابلات معهم عند حلهم لبعض المُشكلات الجبري التي قدمت لهم، وأشارت النتائج إلى أن الطلاب استخدموا استراتيجية الفحص والتخمين واستراتيجية التبسيط كإستراتيجية شائعة بينهم. وأوصت الدراسة بأهمية توظيف معرفة الطلاب المبدئية وغير الشكلية لتدعيم وتنمية التفكير الجبري.

ودراسة الجندرا (Alejandre, 2002) والتي حاولت تنمية التفكير الجبري عن طريق إعطاء عينة من طلاب المرحلتين المُتوسطة والعليا أنشطة حو الأنماط Patterns لمواقف واقعية بمُساعد بعض البرامج الحاسوبية الجاهزة والأدوات التناولية، وأشارت النتائج إلى تنمية مهارات التفكير الجبري وتحسين التحصيل لديهم.

مُشكلة البحث وتساؤلاته:

تحددت مُشكلة البحث في ضعف التفكير الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي لعدم استخدام مداخل تدريسية مُناسبة في تنمية هذا النوع من التفكير على الرغم من أهميته، ومن ثم يُقدِم هذا البحث نموذج تدريسي يُسمى نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي وقياس فعّاليته في تنمية التفكير الجبري لدى طلاب الصف الثاني الإعدادي.

ويمكن صياغة مشكلة البحث في السؤال الرئيس التالي:

- ما فعّالية استخدام نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى طلاب الصف الثاني الإعدادي؟

أهداف البحث:

يهدف البحث الحالي إلى معرفة:

- فعّالية استخدام نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري بشكل عام لدى طلاب الصف الثاني الإعدادي.
- فعّالية استخدام نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري (كل مهارة على حدة) لدى طلاب الصف الثاني الإعدادي.

أهمية البحث:

تتمثل أهمية البحث في الآتي:

١) مُسايرة الإهتمام العالمي بالإستراتيجيات البنائية و"ما وراء معرفية" المُتمثلة في هذا البحث بنموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي، وتوظيفها كمداخل تدريسية للتفكير الجبري، والبحث عن طرق التدريس الفاعلة في تنميته، مما يفتح الطريق أمام بحوث أخرى في هذا المجال.

٢) الإسهام في توجيه أنظار المسؤولين والمُهتمين في تطوير المناهج في مصر إلى ضرورة توظيف نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في بناء استراتيجيات تدريسية، وتضمينها في المناهج الدراسية، وتدريب العاملين عليها مما قد يفيد واضعى المناهج والمُعلمين في هذا الميدان.

٣) تقدم الدراسة بعض الأدوات البحثية والمُتمثلة في اختبار التفكير الجبري، مع توضيح خطوات إعداد وتقنين الاختبار مما يفيد في إعداد أدوات بحثية مُماثلة.

٤) تزود الدراسة مُعلمي ومُخططي ومُطوري مقررات الرياضيات بدليل مُعلم وفق نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي، مما قد يفيد في إعداد وحدات دراسية أخرى.

مُصطلحات البحث:

التفكير الجبري Algebraic Thinking:

يُقصد به "نمط من أنماط التفكير أو النشاط العقلي يقوم به التلميذ من خلال توظيف كل من: مهارات حل المُشكلة، ومهارات الاستدلال، ومهارات التمثيل الرياضي في مُحتوى الجبر".

نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي:

هو الفهم الذي يصفه بيري وكيرين بمراحله الثمان وهي: التعرف البدائي، تكوين الصورة، امتلاك الصورة، مُلاحظة الصفات، التعميم، المُلاحظة، وضع القواعد، والإستقصاء، ويعرف إجرائياً بمجموعة التحركات التي يقوم بها المُعلم من حيث التخطيط وتنظيم وتنفيذ المادة التعليمية، تقوم على طرح وحدة العلاقة بين مُتغيرين وفق خطوات نموذج بيري وكيرين.

حدود البحث:

يلتزم البحث الحالي بالحدود التالية:

- وحدة العلاقة بين مُتغيرين من مقرر جبر الصف الثاني الإعدادي (الفصل الدراسي الأول ٢٠١٩-٢٠٢٠م)، حيث يتم إعادة صياغة مُحتواها في ضوء نموذج بيري وكيرين.

- اقتصر البحث على تلاميذ الصف الثاني الإعدادي في مدرسة الدكتور محمد أبوالليل الإعدادية التابعة لمديرية التربية والتعليم بالدقهلية.
- اقتصر البحث على مهارات التفكير الجبري التالية كحدود موضوعية (مهارات حل المُشكلة – مهارات الاستدلال الرياضي – مهارات التمثيل الرياضي).

إعداد مواد وأدوات البحث:

أولاً: دليل المُعلم للتدريس باستخدام نموذج بيري وكيرين:

- تم اختيار وحدة العلاقة بين مُتغيرين من مقرر جبر الصف الثاني الإعدادي لأن موضوعاتها تناسب طبيعة النموذج، كما أنها من الموضوعات الهامة التي سوف يُبنى عليها التعلم في الصفوفة التالية. وقد تم الإستعانة بوثيقة الأهداف العامة والخاصة لمادة الرياضيات لمرحلة التعليم الإعدادية ودليل المُعلم التي حددت عدد دروس هذه الوحدة والأهداف الخاصة لكل درس من الدروس، حيث بلغ عدد الأهداف (١٦) هدفاً، وحللت الوحدة إلى مفاهيم وتعميمات ومهارات والمسائل التي تضمنتها. واستندت خطوات التدريس في دليل المعلم على (٨) مُستويات هي:

١. **التعرف البدائي:** ويتم فيه البدء في عملية الفهم والنمو في الرياضيات فيكون لدى الطالب خلفية بسيطة عن الموضوع، وهي ما يفترض المُعلم أنه موجود لدى الطالب بالنسبة لموضوع مُعين عندما يريد تعليمه.

٢. **تكوين الصورة:** في هذا المُستوى يقوم المُتعلم بصنع تمييزات بالنسبة لمعرفته البدائية، مثلاً إن كان يعرف سابقاً الشكل الرباعي، ودرس المُستطيل فإنه في هذا المُستوى يقوم بصنع تمييزات بين كلا الشكلين، وباستخدام المعرفة البدائية بأساليب وطرق جديدة.

٣. **امتلاك الصورة:** في هذا المُستوى يمكن للطالب أن يستعمل التراكيب الذهنية حول موضوع مُعين ويقوم بنشاطات خاصة تدور حول الموضوع دون أن يكون هناك وسائل محسوسه تُساعده على ذلك، مثلاً إن كان الطالب في مُستوى تكوين الصورة يستخدم قطاعات الدائرة لجمع الكسور، فإنه في هذا المُستوى يقوم بذلك دون حاجة إلى القطاعات.

٤. **مُلاحظة الصفات:** يحدث عندما يكون باستطاعة الطالب أن يجمع جوانب من الصورة الذاتية لبناء صفات رياضية مُرتبطة بالسياق. هنا مُلاحظة الصفات تُمكن المُتعلم من القيام بأفعال رياضية مُلائمة للموضوع الذي يتعلمه، فمثلاً يمكن للطالب أن يستخدم

استراتيجية تحويل مجموع كسرين أو أكثر إلى كسر مَعلوم وذلك لكي يقوم بعملية جمع الكسور بصورة بسيطة. هذه المُلاحظة ذاتية خاصة بكل طالب، أي أن الاستراتيجية المذكورة قد لا يستخدمها كل الطلاب بل بعضهم والذين تمكنوا من مُلاحظة هذه الصفة (إن جمع الكسور يُصبح أسهل عندما نحول مجموع البعض منها إلى كسر معلوم).

٥. **التعميم:** في هذا المُستوى يعمم الطالب خاصية مُعينة من صورة سابقة بالإعتماد على ما لاحظه من صفات، أي أنه في هذا المُستوى يستطيع الطالب استخلاص الخاصية المُشتركة وتعميمها على مواقف جديدة مُشابهة أو فهم أساليب رياضية معينة من خلال أفكار رياضية سابقة. مثلاً يمكن للطالب أن يستنتج أن الجمع يمكن إجراؤه باستخدام مفاهيم عددية ورموز ترتبط بالكسور، وهو شئ عرفه سابقاً.

٦. **المُلاحظة:** الشخص الذي يقوم بعملية التعميم هو في موقف يمكنه من خلاله أن يفكر بالموقف بشكل انعكاسي وينظمه، ويعبر عن التفكير والتنظيم للمعرفة الجديدة على شكل نظريات تتعلق بالموقف. هذا التعبير ندعوه بالمُلاحظة، مثال على مُستوى المُلاحظة هو البحث عن أنماط في تكافؤ الكسور يمكن أن تساعد في جمع الكسور.

٧. **وضع القواعد الهيكلية:** يحدث عندما يبدأ الطلاب بالتفكير في مُلاحظاتهم الرسمية كنظرية. وهذا يعنى أن الشخص واعٍ لكيفية ارتباط مجموعة النظريات ببعضها، وهذا يستدعي تعليل الارتباطات من خلال حوار منطقي أو رياضي، لو أن الطلاب تحدثوا عن التقسيم بذكر أدوات محسوسة لكان ذلك امتلاك صورة أو مُلاحظة صفات، ولو أنهم تحدثوا عن التقسيم بواسطة الأشكال لكان ذلك تعميماً. أما في الهيكلة فالحديث عن التقسيم هو حديث عن بنية رياضية لا تعتمد على الأدوات المحسوسة ولا على الأفعال الخوارزمية.

٨. **الإستقصاء:** في هذا المُستوى يمتلك معرفة هيكلية كبيرة وبالتالي يستطيع التخلص من أخطاء مفاهيمية سابقة، بعد اكتساب الطالب الفهم الكامل لمفهوم ما، تتشكل لديه أسئلة قد تؤدي إلى مفاهيم جديدة. مثلاً في مُستوى الهيكلة يستطيع الطالب أن يرى الأعداد النسبية بصورة جديدة وهي كون كل عدد نسبي على شكل زوج مرتب من الصورة (أ، ب) يستطيع الطالب الآن أن يخترع أشياء جديدة عن طريق السؤال: أية أعداد يمكن أن تنتج من أربعة مرتبة من الصورة أ، ب، ج.

- تم استخدام استراتيجيات تقويم أساسية، كالمُلاحظة والقلم والورقة ومن أدواتها: قـوائم الشطب وسلالم التقدير. والتقويم الكتابي الصفي والبيتي. والاختبار القصير.
- وبعد إعداد دليل المُعلم في صورته المبدئية عرض على مجموعة من السادة المُحَكَمين لتحديد مدى مُناسبة الأهداف لكل درس، وأسلوب عرض الأنشطة لمُحتـوى الوحـدة، وأسلوب عرض المُحتوى في دليل المُعلم، والوسائل التعليمية للمُحتوى، وأساليب التقويم للأهداف، وقد استمر تدريس الوحدة ثلاثة أسابيع بواقع (حصتين أسبوعياً).

ثانياً: إعداد اختبار التفكير الجبري:

لقد مر اعداد اختبار التفكير الجبري بالخطوات التالية:

أ- **الهدف من الاختبار:** قياس مدى امتلاك تلاميذ الصف الثاني الإعدادي لمهـارات التفكيـر الجبري. وهو يقيس مركبتا التفكير الجبري؛ وهي مركبة التفكير الرياضي الـذي يـشمل على (مهارات حل المشكلات – مهـارات الاسـتدلال الرياضـي – مهـارات التمثيـل الرياضي)، ومركبة أفكار الجبر الأساسية (محتويات الاختبار) مثل: معادلة الدرجة الأولى في مُتغيرين، العلاقة الخطية، الأزواج المرتبة، التمثيل البياني للعلاقة الخطية، ميل الخـط المُستقيم، المشكلات اللفظية.

ب- **صياغة مُفردات الاختبار:** تم صياغة أسئلة الاختبار حول محاور التفكيـر الجبـري بعـد تحديدها، وتتضمن مُفردات اختبارية حول كل من التمثيلات وحل المُـشكلة والاسـتدلال، وذلك بعد الاطلاع على العديد من المُفردات الاختبارية حول التفكير الجبري أو أبعاده في بعض الدراسات مثل دراسـة يوركيوهـارات (Urquhart,2000)، ودراسـة فينـسنت (Vincent, 2000)، ودراسة أنطونيـو (Antonio, 2003)، ودراسـة أحمـد رجـائي (٢٠٠٩)، ووثائق المجلس القومي لمُعلمي الرياضـيات (NCTM, 1989,1991,1998 and 2000)، كما تم الاطلاع على بعض الدراسات التي تناولت التفكير الرياضي مثـل: دراسة شيرين صلاح (٢٠٠٥)، ودراسة محمود عبداللطيف والسيد الوكيل (٢٠٠٦)،

ج- **صدق الاختبار:** تم عرض الاختبار في صورته الأولية على مجموعة من السادة المُحكَمين في مجال المناهج وطرق تدريس الرياضيات؛ وذلك للتحقق من أن مفردات الاختبار تقيس مهارات حل المُشكلة، ومهارات الاستدلال الرياضي، ومهارات التمثيل الرياضي، ومُناسبة تلك المُفردات لمُستوى طلاب الصف الثاني الإعدادي، ومدى وضوع الـصياغة العلميـة واللغوية، وتم عمل التعديلات في ضوء السادة المُحكَمين.

د- **التجريب الاستطلاعي للاختبار:** تم على عينة استطلاعية من تلاميذ مدرسة الخمسة الإعدادية التابعة لمديرية التربية والتعليم بالدقهلية، وتكونت العينة من (٣٠) تلميذ وتلميذة في بداية العام الدراسي ٢٠١٩-٢٠٢٠م، وأعيد تطبيقه عليهم مرة ثانية بعد أسبوعين من التطبيق الأول، وتم حساب مُعامل الارتباط بين درجات التطبيقين فوجد (٠,٧٩) ويعبر عن ثبات مقبول من الناحية الإحصائية، وكان الزمن المُناسب للاختبار حوالي (١٢٠ دقيقة) بواقع حصتين، وكانت التعليمات واضحة لدى مُعظم التلاميذ.

ه- **الصورة النهائية للاختبار:** بلغ عدد أسئلة الاختبار في الصورة النهائية من (١٦) مفردة موزعة على أبعاد الاختبار الثلاثة للتفكير الجبري، والتصحيح يتم بطريقة تحليلية، والدرجة النهائية لهذا الاختبار هي (٤٥) درجة والجدول التالي يوضح توزيع مفردات الاختبار، ودرجة كل بعد من أبعاده الثلاثة.

جدول (١)

توزيع أسئلة اختبار التفكير الجبري على أبعاده

أبعاد التفكير الجبري	عدد الأسئلة	الدرجة
حل المشكلات الجبرية	٤	١٠
التمثيلات الجبرية	٥	١٧
الاستدلال الجبري	٧	١٨
الإجمالي	١٦ سؤال	٤٥

إجراءات البحث:

١. منهج البحث والتصميم التجريبي:

استخدم البحث المنهج شبه التجريبي ذو تصميم المجموعتين (تجريبية – ضابطة)، حيث المجموعة التجريبية تدرس وحدة العلاقة بين مُتغيرين باستخدام نموذج بيري وكيرين، والمجموعة الضابطة تدرس الوحدة نفسها بالطريقة الإعتيادية.

٢. اختيار عينة البحث:

تم اختيار عينة البحث من تلاميذ الصف الثاني الإعدادي بمدرسة الدكتور مُحمد أبو الليل الإعدادية بمديرية التربية والتعليم بالدقهلية، بواقع فصلين هما ٢/١ كمجموعة ضابطة و ٢/٢ كمجموعة تجريبية، والذي بلغ عددهم (٧٣) تلميذ وتلميذة.

٣. **التطبيق القبلي لأداة البحث:**

تم تطبيق أداة البحث المُتمثلة في اختبار التفكير الجبــري علــى المجمــوعتين التجريبيــة والضابطة؛ وذلك لحساب التكافؤ بين المجموعتين، وكانت نتائج التطبيــق فــي بدايــة الفــصل الدراسي الأول من العام الدراسي ٢٠٢٠/٢٠١٩، ثم قام الباحث بتصحيح إجابات التلاميذ ورصد النتائج، وتم التأكد من تكافؤ مجموعتي البحث التجريبية والضابطة في اختبار التفكيــر الجبــري. وذلك عن طريق إيجاد قيمة "ت" للمقارنة بين مُتوسطي درجات طلاب المجموعتين على اختبــار التفكير الجبري قبلياً، وذلك باستخدام برنامج (SPSS)، وقد تبين عدم وجود فرق دال احــصائياً عند مُستوى (٠,٠٠٥) بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في اختبــار التفكير الجبري وفي أبعاده الفرعية كل على حده وذلك في التطبيق القبلي للاختبار؛ وهــذا يــدل على تكافؤ مجموعتي البحث.

٤. **التدريس لمجموعتي البحث:**

حيث درست المجموعة التجريبية وحدة العلاقة بين مُتغيرين مــن جبــر الــصف الثــاني الإعدادي (الفصل الدراسي الاول من العام الدراسي (٢٠١٩–٢٠٢٠م))، ولمــدة ثلاثــة أســابيع بواقع حصتين أسبوعياً، وذلك باستخدام نموذج بيري وكيرين وفق المُستويات الثمانية التــي تــم ذكرها سابقاً، والمجموعة الضابطة درست الوحدة نفسها بالطريقة الإعتيادية فــي نفــس المــدة الزمنية أيضاً.

٥. **التطبيق البعدي لأداة البحث:**

تم تطبيق اختبار التفكير الجبري على مجموعتي البحث بعدياً، بعد الإنتهاء من التــدريس بأسبوع، بعد ذلك تم تصحيح الإجابات ورصد الدرجات.

٦. **فروض البحث:**

للإجابة على سؤال البحث الرئيس، تم مراجعة أدبيات البحــث الــسابقة والتــي تناولــت مُتغيرات الدراسة الحالية، وبناءاً على ذلك تم ترجمة سؤال البحث في صورة فرضين صــفريين لاختبارهما إحصائياً، وهما:

١. لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مُستوى دلالة (≤٠,٠٥) بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكيــر الجبــري (الأبعــاد والدرجة الكلية).
٢. لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مُستوى دلالة (≤٠,٠٥) بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري (الأبعاد والدرجــة الكلية).

نتائج البحث:

للإجابة على سؤال البحث الرئيس فقد تم الآتي:

أ) اختبار الفرض الأول والذي نص على:

" لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مُستوى دلالة (≤٠,٠٥) بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري (الأبعاد والدرجة الكلية)".

وقد تم استخدام اختبار t-test لعينتين مُستقلتين لتحديد دلالة الفرق بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في اختبار التفكير الجبري، وجدول (٢) يُبين تلك النتائج:

جدول (٢)

المُتوسط والإنحراف المعياري وقيم "ت" لدى تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري (الأبعاد والدرجة الكلية)

أبعاد الإختبار	التطبيق	ن	درجات الحرية df	المُتوسط (م)	الإنحراف المعياري (ع)	قيمة "ت"	مستوى الدلالة عند ٥%
حل المشكلات الجبرية	تجريبية	٣٥	٧١	٩,٠٣٢١	٣,٢٩٠١	٣,١٩٠٢	دال
	ضابطة	٣٨		٧,٠٠٠٠	١,٨٩١١		
التمثيلات الجبرية	تجريبية	٣٥	٧١	١١,١١٣٢	٢,٧٥٠١	٣,٩١١٣	دال
	ضابطة	٣٨		٨,٥٨٠١	٢,٧٩١١		
الاستدلال الجبري	تجريبية	٣٥	٧١	١٥,٣٤٠١	٣,١١٠١	٦,٣٥٠٦	دال
	ضابطة	٣٨		٩,٨١٠١	٤,٢٠١١		
الدرجة الكلية للإختبار	تجريبية	٣٥	٧١	٣٥,٤٨٥٤	٦,٦٣١٨	٦,٤٣١٠	دال
	ضابطة	٣٨		٢٥,٣٩٠٢	٦,٧٦٠٢		

يتبين من الجدول السابق وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين مُتوسط درجات تلاميذ المجموعة التجريبية ومُتوسط درجات تلاميذ المجموعة الضابطة في الأبعاد الفرعية لاختبار التفكير الجبري وفي الدرجة الكلية للإختبار، وذلك في الأداء البعدي لصالح المجموعة التجريبية (ذات المُتوسط الأعلى)، حيث جاءت جميع قيم "ت" دالة إحصائياً عند مُستوى دلالة (٠,٠٥) ودرجة حرية (٧١).

وبناءاً على ذلك تم رفض الفرض الأول من فروض البحث، وقبول الفرض البديل، والذي ينص على:

"يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مُستوى دلالة (≤٠,٠٥) بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري (الأبعاد والدرجة الكلية)، وذلك لصالح المجموعة التجريبية".

وهذا يدل على أن تدريس وحدة العلاقة بين مُتغيرين باستخدام نموذج بيري وكيرين أفضل من تدريس الوحدة بالطريقة الإعتيادية في تنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي.

ب) اختبار الفرض الثاني والذي نص على:

"لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مُستوى دلالة (≤٠,٠٥) بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري (الأبعاد والدرجة الكلية)".

وللتحقق من صحة هذا الفرض، تم استخدام اختبار t-test لعينتين مُرتبطتين؛ وذلك لحساب دلالة الفرق بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية على اختبار التفكير الجبري قبل وبعد دراستهم للوحدة باستخدام نموذج بيري وكيرين، وجدول (٣) يُبين تلك النتائج:

جدول (٣)

المتوسط والانحراف المعياري وقيمة "ت" لدى تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري (الأبعاد والدرجة الكلية)

أبعاد الإختبار	التطبيق	ن	درجات الحرية df	المُتوسط (م)	الإنحراف المعياري (ع)	قيمة "ت"	مستوى الدلالة عند ٥%
حل المُشكلات الجبرية	قبلي	٣٥	٧١	٢,٣٧٠٠	١,١٩٠٥	– ١١,٧٥٦٤	دال
	بعدي	٣٨		٩,٠٣٢١	٣,٢٩٠١		
التمثيلات الجبرية	قبلي	٣٥	٧١	١,٨٦٠١	٠,٩٧٠٣	–١٨,٤٢٦٣	دال
	بعدي	٣٨		١١,١١٣٢	٢,٧٥٠١		
الاستدلال الجبري	قبلي	٣٥	٧١	٢,٧٧٠٠	١,٣٧٥٦	–٢٢,٣٦٢٩	دال
	بعدي	٣٨		١٥,٣٤٠٠	٣,١١٠١		
الدرجة الكلية للإختبار	قبلي	٣٥	٧١	٧,٠٠٠١	٢,٢٢٨٧	–٢٥,٥٥٧٢	دال
	بعدي	٣٨		٣٥,٤٨٥٤	٦,٦٣١٨		

يتبين من الجدول السابق وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين مُتوسطي درجـات تلاميـذ المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي في الأبعاد الفرعية لاختبار التفكيـر الجبـري، وفي الدرجة الكلية للإختبار لصالح الأداء البعدي (ذو المُتوسط الأعلى)، حيث جاءت جميع قـيم "ت" دالة إحصائياً عند مُستوى دلالة (٠,٠٥) ودرجة حرية (٧١).

وبناءاً على ذلك تم رفض الفرض الثاني من فروض البحث، وقبول الفرض البديل، والـذي ينص على:

"يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مُستوى دلالة (≤٠,٠٥) بين مُتوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري (الأبعـاد والدرجـة الكلية)، وذلك لصالح الأداء البعدي".

وهذا يدل على وجود أثر لتدريس وحدة العلاقة بين مُتغيرين باستخدام نموذج بيري وكيرين على تلاميذ المجموعة التجريبية في اختبار التفكير الجبري، ويتضح ذلك في التطبيق البعدي.

ولتحديد مدى فاعلية النموذج في تنمية مهارات التفكير الجبري لـدى تلاميـذ المجموعـة التجريبية، كان لا بد من حساب حجم التأثير وكانت النتائج كالتالي:

جدول (٤)

قيم (η^2) وحجم تأثير نموذج بيري وكيرين على التفكير الجبري لدى تلاميذ المجموعة التجريبية

الأبعاد	قيمة η^2	حجم التأثير
حل المشكلات الجبرية	٠,٨٠	كبير
التمثيلات الجبرية	٠,٩١	كبير
الاستدلال الجبري	٠,٩٤	كبير
الدرجة الكلية للاختبار	٠,٩٥	كبير

يتضح من الجدول السابق أن تدريس وحدة العلاقة بين مُتغيرين باستخدام نمـوذج بيـري وكيرين له تأثير كبير في تنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ المجموعة التجريبية، حيث تراوحـت قيم (η^2) في كل بعد من أبعاد اختبار التفكير الجبري وفي الاختبار ككـل مـا بـين (٠,٨٠ – ٠,٩٥).

وهذا يدل على أن نموذج بيري وكيرين يتسم بالفاعلية في تنمية التفكير الجبري لدى أفراد عينة البحث.

وتتفق نتائج هذا البحث مع دراسة أحمد رجــائي (٢٠٠٩)، ودراســة ســامو (Samo, 2009)، ودراسة بانستر ووليكنز (Bannister and Wilkins, 2006)، ودراســة جوهــانينج (Johanning, 2004, P.372)، ودراسة الجندرا (Alejandre, 2002). حيث توصلت نتــائج هذه الدراسات إلى تنمية التفكير الجبري لدى طلاب المرحلة الإعدادية، وطلاب المرحلة الثانوية، وكذلك طلاب الجامعة باستخدام مُتغيرات بحثية مُختلفة، كما اتفقت نتائج هذه الدراسة مع دراســة ويلسون وستين (Wilson and Stein, 2007)، ودراســة والتــر وجيبــونس (Walter and Gibbons, 2010)، ودراسة محمد الخطيب (٢٠١٧)، حيث توصلت هذه الدراسات إلى فاعليــة نموذج بيري وكيرين في تنمية حل المُشكلات الرياضية والتمثيل الرياضـــي وكــذلك الاســتدلال المنطقي لدى الطلاب.

ويمكن إرجاع نمو مهارات التفكير الجبري لدى تلاميذ المجموعة التجريبية بالــصف الثاني الإعدادي إلى الأسباب التالية:

١. أن تلاميذ المجموعة التجريبية مروا بمُستويات مُختلفة من الفهم أثنــاء تعلمهــم إبتــداء بالمُستوى الأول التعرف البدائي وحتى المُستوى الأخير الهيكلة والإستقصاء، ويرجع ذلك إلى تقديم أنشطة وتطبيقات من قبل المُعلم شجعت التلاميذ للوصول إلى المُستويات العليا، مما أدى إلى ارتفاع درجاتهم في اختبار التفكير الجبري.

٢. تميز كل مُستوى فهم مر التلاميذ به بخصائص مُختلفة من خصائص الفهم مثل حــدوث عملية الطي العكسي، وعدم وجود حدود بين مُستويات الفهم، وقيام التلاميذ بمُمارســات تعلمية مُختلفة في كل مُستوى مثل تقديم الأفكار وبنائها والإستفسار عنها والتحقــق مــن صحتها وإعادة تنظيمها مما كان له الأثر الواضح في تفوق التلاميذ في اختبــار التفكيــر الجبري وبخاصة مهارة الإستدلال.

٣. باستخدام نموذج بيري وكيرين تم تقديم أنشطة وتطبيقات غير مُباشرة تجمع بــين كــل القوانين التي تعلمها التلاميذ في موضوع التعلم، مما جعل التلاميذ يصلون إلى الهيكلــة التي تستلزم منهم الربط بين مجموعة من القوانين وتفسير هذا الإرتباط بشكل منطقي.

٤. الأنشطة التي قام بها التلاميذ والتطبيقات التي حلوها كانت محفزة لهــم للوصــول إلــى مُستوى الإستقصاء والذي يستلزم منهم اكتشاف مفاهيم جديدة لم يسبق لهم تعلمها وهــذا أحدث فرقاً في نتائج اختبار التفكير الجبري.

٥. تلاميذ المجموعة التجريبية الذين درسوا باستخدام نموذج بيري وكيرين وصلوا إلى مُستوى امتلاك عالٍ، فقد قام التلاميذ بمُمارسات تعلمية ساعدتهم في الوصول إلى هذا المُستوى من الفهم، وأكثر هذه المُمارسات تكراراً هو الإستفسار عن الأفكار وبناء الأفكار.

٦. تتفق أيضاً ننتائج هذه الدراسة مع دراسة ولسون وستن (Wilson and Steinm, 2007)، والتي هدفت معرفة العلاقة بين التمثيلات الخارجية للمفهوم الرياضي والنمو في الفهم، وقد تم التحقق من مُستويات المشاركين في الفهم باستخدام نموذج بيري وكيرين وكذلك نوع التمثيل المُستخدم في كل مُستوى من مُستويات هذا النموذج، أفادت النتائج بأن هناك علاقة بين مُستويات الفهم عند المُشاركين وأنواع التمثيلات المُستخدمة، كما أن المُعلمين استطاعوا تقييم فهم الطلاب لمفهوم رياضي مُعين من خلال أسئلة أو مهام تظهر تمثيل هذا المفهوم بأشكال أخرى.

٧. توظيف بعض عمليات الرياضيات في مُناقشة الأنشطة المُستخدمة مثل التمثيلات الرياضية والاستدلال وحل المُشكلات، ساعد على انجاز التلاميذ في اختبار التفكير الجبري.

٨. هناك علاقة بين التفكير الاستدلالي وحل المُشكلات، حيث كل منهما يؤثر بالايجاب في الأخر، وهذا ما أكدته دراسة أحمد عفيفي (٢٠٠٩)، مما أدى إلى نمو التفكير الجبري ككل لدى تلاميذ المجموعة التجريبية.

توصيات البحث:

في ضوء ما أسفر عنه البحث من نتائج، يُمكن تقديم التوصيات التالية:

١) أظهرت نتائج البحث وجود أثر إيجابي لنموذج بيري وكيرين في تنمية التفكير الجبري، لذلك فإن الباحث يوصي باستخدام النموذج في تدريس فروع أخرى من الرياضيات، لما له أثر فعال في تنمية التفكير لدى الطلاب.

٢) الإهتمام من جانب القائمين على تأليف كتب الرياضيات بهذا النموذج ومُحاولة تقديم المادة من خلاله.

٣) تطوير كتب الرياضيات المدرسية في ضوء عمليات الرياضيات المُختلفة مثل مهارات التفكير المُتنوعة، وذلك بتضمينها أنشطة توظف مهارات التفكير مع مُراعاة طبيعة المادة المعرفية.

بحوث ودراسات مُقترحة:

في ضوء نتائج البحث يُمكن أن تنبثق البحوث والدراسات التالية:

١) إجراء دراسة مُماثلة للدراسة الحالية على مُتغيرات أخرى، كالبرهان الرياضي، والنمذجة الرياضية.

٢) إجراء دراسة مُماثلة للدراسة الحالية على مراحل دراسية أخرى، كالمرحلة الثانوية.

٣) برنامج لعلاج صعوبات تعلم الجبر في موضوعات جبرية مُختلفة، مثل الدوال، والمعادلات، والمتباينات..لدى طلاب مراحل تعليمية مُختلفة باستخدام أنشطة تنمي لديهم مهارات التفكير الجبري وتعمل على تحسين رؤاهم لطبيعة مادة الجبر.

٤) دراسة تأثير استخدام نموذي بيري وكيرين في تدريس الهندسة على نمو التفكير الهندسي لدى الطلاب.

مراجع البحث

أولاً: المراجع العربية:

إبراهيم رفعت إبراهيم (٢٠٠٨). فاعلية نموذج إسراع النمو المعرفي في تنمية مهارات التواصل الرياضي والتفكير الاستدلالي لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، **مجلة تربويات الرياضيات**، المجلد الحادي عشر.

أحمد محمد رجائي (٢٠٠٩). تأثيرات دراسة الطلاب معلمي الرياضيات لأنشطة حول "المتغيرات والأنماط" في تنمية التفكير الجبري وتعديل معتقداتهم نحو طبيعة تدريس الجبر، **مجلة تربويات الرياضيات**، المجلد الثاني عشر.

تركي بن حميد السلمي (٢٠١٣). درجة إسهام معلمي الرياضيات في تنمية مهارات حل المشكلة الرياضية لدى طلاب المرحلة الإبتدائية، رسالة ماجستير منشورة، كلية التربية، جامعة أم القرى، المملكة العربية السعودية.

رباب على (٢٠١٥). فاعلية برنامج لتنمية بعض عمليات التفكير المنطقي لطفل الروضة، **مجلة التربية**، جامعة الأزهر، ٣ (١٦٢).

عبد الله النافع (٢٠٠٢). **برنامج الكشف عن الموهوبين ورعايتهم**، مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية.

عزة محمد عبد السميع (٢٠٠٩). فاعلية استراتيجيات ما وراء المعرفة في تنمية مهارات حل المشكلات الرياضية والتفكير الناقد والاتجاه نحو الرياضيات لدى طلاب الصف الأول الثانوي، **مجلة تربويات الرياضيات**، المجلد (١٢)، أكتوبر، ص ص: ١٧٣-٢١٨.

فريد كامل أبو زينة (٢٠١٠). **تطوير مناهج الرياضيات المدرسية وتعليمها**، عمان، الأردن، دار وائل للنشر.

لمياء محمد الشافعي (٢٠١٠). برنامج مقترح قائم على المتشابهات لتنمية مهارات حل المسألة الرياضية لدى طالبات الصف التاسع بغزة، رسالة ماجستير منشورة، الجامعة الإسلامية، غزة.

مجدي عزيز ابراهيم (٢٠٠٣). **فاعليات تدريس الرياضيات في عصر المعلوماتية**، القاهرة، عالم الكتب.

محمد أحمد الخطيب (٢٠١٧). أثر استخدام نموذج بيري وكيرين (pirie and kieren) للفهم الرياضي في الاستدلال المنطقي وفض العبء المعرفي لدى طلاب الصف السابع الأساسي في الأردن، **مجلة جامعة طيبة للعلوم التربوية**، المجلد (١٢)، العدد (٢).

ناجي ديسقورس ميخائيل (٢٠٠٥). حل المشكلة الرياضية معرفياً وما وراء معرفياً، **المؤتمر الخامس للجمعية المصرية لتربويات الرياضيات**، كلية التربية ببنها، (٢٠-٢١) يوليو.

هشام حسين ومصطفى محمد (٢٠١٣). تدريس الاستدلال الرياضي في المرحلة الثانوية، **مجلة تربويات الرياضيات**، ١٦ (١).

وليم تاوضرس عبيد (٢٠٠٤). **تعليم الرياضيات لجميع الأطفال في ضوء متطلبات المعايير وثقافة التفكير**، عمان، الأردن، دار المسيرة.

وليم تاوضروس عبيد وآخرون (٢٠٠٠). **تربويات الرياضيات**، طبعة مُطورة، القاهرة، مكتبة الأنجلو المصرية.

وليم عبيد وعزو عفانة (٢٠٠٣). **التفكير والمنهاج المدرسي**، القاهرة، مكتبة الفلاح.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

Algebraic Thinking Math Project (2001). Lesson Plans and video Clips. URL:http://www.pbs.org/teachersource/mathline/lessonplans/atmp.Shtm.

Antonio, S. (2003). Promoting algebraic thinking in the middle grades using spreadsheets. Nctm Annual Meeting, University of Missouri. URL: http://web.missouri.edu/~chavezo/nctm03/nctm03.pdf

Bannister, V.R.and Wilkins, J.L.(2006). Exploring an Intermediary Phase of Arithmetic and Algebraic Thinking. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Saiz, M., and Mendezn A.(Eds), proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Me'rida, Me'xico:Universidad Pedago'gica Nacional.URL:http://www.pmena.org/2006\cd\RATIONAL%20AND%20WHOLE%20NUMBERS\RATIONAL%20AND%20WHOLE%20NUMBERS-0006.pdf

Cai, J and Moyer, J.C. (2008). Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some Insights from International Comparative Studies. In Carol Greenes (Ed.), *Algebra and Algebraic Thinking*, 2008 NCTM Yearbook. Reston, VA: NCTM.

Cai, J., Lew, H.C., Morris, A., Moyer, J.C.,Ng,S.F. & Schmittau, J.(2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective. Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik. *International Review on Mathematics Education*, 37(1),PP. 5-15.URL:http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm051a1.pdf

Coulombe, W.N.and Berenson, S.B. (2001). Representations of Patterns and Functions: Tools for Learning. In A.Cuoco (Edr.), The Roles of Representation in school Mathematics (PP.166-172). Reston VA:NCTM.

Fennell, F.and Rowan, T. (2001). Representation: An Important Process for Teaching and Learning Mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), PP.288-292.

Herbert, k. and Brown, R.H.(1999). Patterns as Tools for Algebraic Reasoning. In B.Moses (Edr.), Algebraic Thinking, Grades K-12(PP.123-128). Reston VA:NCTM.

Johanning, D.I. (2004). Supporting the Development of Algebraic Thinking in Middle School: a Closer Look at Students' Informal Strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, 23 (4), 371-388.

Johanning, D.I. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 371-388.

Kieren, T. and Simmt, E. (2002). Fractal Filaments: A Simile for Observing Collective Mathematical Understanding. *Paper presented at the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, Athens, GA.

Kondratieval, M.F. and Radu, G.(2009). Fostering connections between the verbal, Algebraic, and geometric representations of basic Planar curves for student's success in the study of Mathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast(TMME)*,6(1-2), PP.213-238.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).principles and Standards for School Mathematics. Reston VA: NCTM.

Pirie, S. and Kieren, T. (1999). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterize it and How Can We Represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

Pirie, S. and Kieren, T.(1991). Folding Back: Dynamics in the Growth of Mathematical Understanding. *Proceeding of 15th Psychology of Mathematics Education Conference*, Assisi.

Radford, L.(2001). The Historical Origins of Algebra, edited by R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins, Dordrecht/Boston/ London: Kluwer, PP. 13-36.URL: http//laurentian.ca/NR/rdonlyres//477FBC25-EFD7-4A5B-B401-53A110C4E311/0/LRadfoedHistoricalOriginsofAlgebraicThinking.pdf

Samo,M.A. (2009).Students' Perceptions about the Symbols, Letters and Signs in Algebra and How Do These Affect Their Learning of Algebra: A Case Study in a Government Girls' Secondary School Karachi. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.URL:http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/samo.pdf

Urquhart, V. (2000). Algebraic Thinking: Preparing Students for Mastering Algebraic Concepts. Changing School. URL: http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1a/b4/6e.pdf.

Vincent, J. (2000). The Future of the Teaching and Learning of Algebra: Discussion Document.URL:http:\\www.edfac.unimelb.edu.au/DSME/icmi-algebra/discussiondoc.html.

Walter, J.and Gibbons, S. (2010). Student Problem-Solving Behaviors: Traversing the Pirie-Kieren Model for Growth of Mathematical Understanding. *A Paper Presented at the Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Raleigh, North Carolina, February 25-28.

Wilson, H. and Stein, C.(2007). The Role of Representations in Growth of Understanding in Pattern-Finding Tasks. *Paper Presented at the 9th International Conference-Mathematics Education in a Global Community*. Charlotte, North Carolina, September 7-12, 2007.